ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
ET DES MINES D'ALES

CONCOURS 1991

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.

N.B. : Les copies illisibles ou mal présentées sont corrigées aux risques et périls du candidat.

SUJET N° 1

Ce problème comprend trois parties

Dans tout ce problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal. L'unité est 4 cm.

Première partie

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1 - e^x)$

a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de 0.

b) Etudier les variations de f', fonction dérivée de f ; en déduire les variations de f.

c) Etudier les branches infinies de la courbe représentative (Γ_1) de f et déterminer la position de (Γ_1) par rapport à son asymptote.

Tracer (Γ_1) en précisant son point d'inflexion.

d) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x \in [\lambda \ ; \ 0 \ ], \quad \lambda \leq 0 \\ y \in [x \ ; \ f(x)] \end{cases}$$

Cette aire admet-elle une limite quand λ tend vers moins l'infini ?

2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln(\text{ch } x)$

a) Déterminer le développement limité de g à l'ordre 4 au voisinage de 0.

b) Etudier les variations de g.

c) Démontrer que la courbe représentative (Γ_2) de g admet deux asymptotes ; préciser la position de (Γ_2) par rapport à ses asymptotes.

Tracer (Γ_2).

3) On considère la partie (P) du plan limitée pour $x \in [\ln 2 \ ; \ \mu]$, $\mu \geq \ln 2$, par la courbe (Γ_2) et la droite (Δ) asymptote à (Γ_2) au voisinage de plus l'infini.

On appelle $A(\mu)$ l'aire de (P).

a) Soit φ la fonction définie pour $x \geq 0$ par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - e^{-2x}$

Déterminer le signe de $\varphi(x)$ pour $x \geq 0$.

b) $A(\mu)$ admet-elle une limite quand μ tend vers plus l'infini ?

(On demande uniquement l'étude de l'existence de cette limite).

Deuxième partie

f et g étant les fonctions étudiées précédemment, on appelle (C) la courbe paramétrée définie par :

$$x = f(t) \ , \ y = g(t)$$

1) Dresser le tableau donnant les variations de f et g en fonction de t.

2) On étudie (C) au voisinage du point de paramètre $t = 0$.

a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en ce point.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (T).

Préciser la nature du point de paramètre $t = 0$.

3) On étudie (C) quand le paramètre t tend vers moins l'infini.

Démontrer que (C) admet une asymptote dont on donnera une équation ; préciser la position de (C) par rapport à cette asymptote.

4) Etudier la branche infinie de (C) quand le paramètre t tend vers plus l'infini.

5) Tracer la courbe (C). (On précisera le point d'intersection de (T) et de l'asymptote).

Troisième partie

1) Soit (E_1) l'équation différentielle définie par : $x y' - y = -x^2 e^x$

a) Résoudre (E_1) sur chacun des intervalles : $I_1 =]-\infty ; 0[$; $I_2 =]0 ; +\infty[$

b) Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que l'une des fonctions étudiées dans la première partie est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

2) Soit (E_2) l'équation différentielle définie par : $(1 - e^x)(1 + e^{2x}) y' + 2 e^{3x} y = \Psi(x)$

a) Déterminer la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}$, telle que la fonction f étudiée dans la première partie soit solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre alors (E_2) sur chacun des intervalles : $I_1 =]-\infty ; 0[$; $I_2 =]0 ; +\infty[$

c) Résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$.

A SUIVRE

SUJET N° 2

Ce problème comprend deux parties

Première partie

A (X) et B (X) désignent deux polynômes à une indéterminée X à coefficients réels définis par :

$$A(X) = X^2 + 2X\cos\theta + 1$$

$$B(X) = X^3 + pX^2 + qX + 1$$

1) Calculer p et q en fonction de θ pour que B (X) soit divisible par A (X).

2) On suppose que p et q sont des réels quelconques.

Soit : $Q(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_h X^h$, $h \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

On pose : $A(X) = B(X)\,Q(X) + X^{h+1} R(X)$

Q (X) et R (X) désignent respectivement des polynômes appelés quotient et reste de la division de A (X) par B (X) suivant les puissances croissantes de X jusqu'à l'ordre h. On admettra leur existence et leur unicité.

a) Calculer : a_0, a_1 et a_2 en fonction de p, q et θ.

b) Pour $3 \leq n \leq h$, établir une relation de récurrence liant

a_n , a_{n-1} , a_{n-2} et a_{n-3}.

c) On pose pour $3 \leq n \leq h$

$b_n = a_{n-1}$ et $c_n = a_{n-2}$.

Etablir les égalités matricielles :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

où M est une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels que l'on déterminera.

3) Former le polynôme $\Delta(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ où λ désigne un réel quelconque et I la matrice unité.

Que peut-on dire des racines des polynômes B (X) et $\Delta(\lambda)$?

4) On choisit désormais le polynôme B (X) ayant pour racines : - 1, i, - i .
(i désignant le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$)

a) Calculer p, q, a_0, a_1 et a_2.

b) Calculer M^2 et M^3.

Vérifier que l'on a :

$M^3 + M^2 + M + I = 0$

(0 désigne la matrice nulle).

En déduire que : $M^4 = I$.

c) k étant un entier positif ou nul, exprimer en fonction de θ les valeurs des coefficients a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3} lorsqu'ils existent.

Deuxième partie

1) z désignant un nombre réel ou complexe, différent de - 1, établir l'égalité :

$$(1) \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p z^p + \frac{(-1)^{n+1} z^{n+1}}{1+z}$$

2) a) Décomposer en éléments simples sur le corps des nombres réels :

$$F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$$

p et q ayant les valeurs trouvées à la première partie 4 - a).

b) En utilisant la relation (1), retrouver les valeurs de a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}.

c) Déterminer le quotient et le reste, à l'ordre h, définis dans la première partie 2) pour les deux cas particuliers suivants :

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $h = n$.
- $\theta = 0$ et $h = 2n + 1$.

FIN